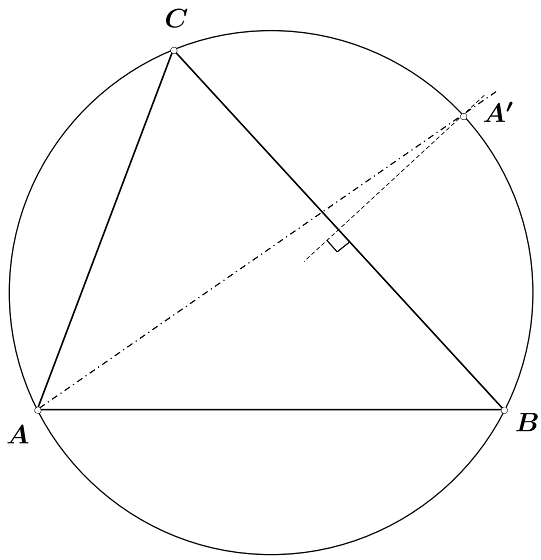
Susret kružnice i dviju simetrala

Tvrtko Tadić

Ponekad nam vrlo jednostavne činjenice u geometriji mogu pomoći pri rješavanju zamršenih problema. Ovdje ćemo proučiti jedan vrlo jednostavan teorem i s njegovu upotrebu.

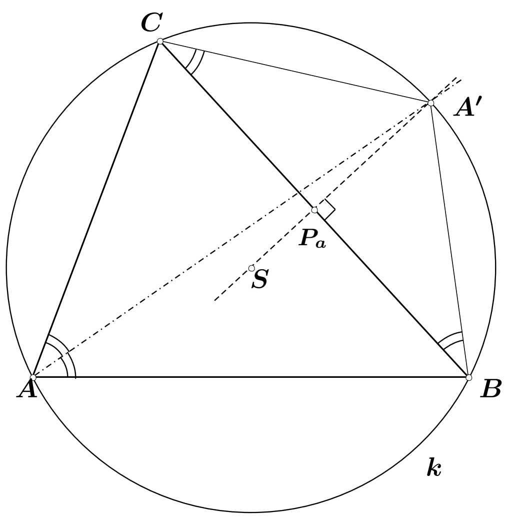
Teorem 1. Simetrala kuta $\angle BAC$ i stranice $\overline{BC}$ sijeku se na kružnici opisanoj trokutu ABC.



Slika 1. *Ilustracija teorema 1.; simetrale kuta i stranice sijeku se u točki A'.*

Kao što je uobičajeno, iza teorema slijedi dokaz. ☺

Dokaz. Nazovimo s P_a i S redom polovište i središte opisane kružnice k trokuta ABC. Neka simetrala stranice $\overline{BC}$ (pravac SP_a) siječe kružnicu k u točki A'. Svaka točka na pravcu SP_a jednako je udaljena od točaka B i C, pa vrijedi $|BA'| = |A'C|$. Stoga je trokut $BA'C$ jednakokračan. Budući da se nad jednakim stranicama nalaze i jednaki kutovi, vrijedi:



Slika 2.

$$\angle BCA' = \angle A'BC. \tag{1}$$

Obodni kutovi $\angle A'AC$ i $\angle A'BC$ nad lukom $\widehat{A'C}$ su jednaki, tj.

$$\angle A'AC = \angle A'BC. \tag{2}$$

Istim zaključivanjem dobivamo da je

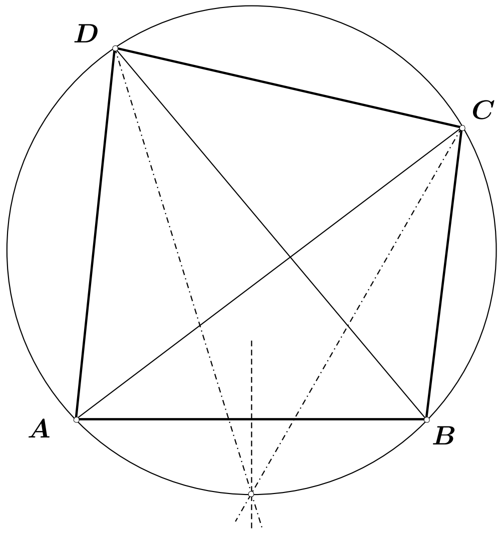
$$\angle BCA' = \angle BAA'. \tag{3}$$

Iz jednakosti (1) – (3) slijedi da je $\angle BAA' = \angle A'AC$, tj. AA' je simetrala kuta u vrhu A. ■

Napomena. Uočimo da je točka A' u prethodnom dokazu polovište luka $\widehat{BC}$.

Sada naravno slijede zadatci u kojima se ovaj teorem može koristiti.

Primjer 1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Dokaži da se simetrale kutova $\angle ADB$ i $\angle ACB$ i simetrala stranice $\overline{AB}$ sijeku se u jednoj točki.



Slika 3.

Rješenje. Koristeći teorem 1. tvrdnja primjera gotovo odmah postaje točna. Simetrala stranice $\overline{AB}$ i kuta $\angle ADB$ po teoremu 1. sijeku se u polovištu luka $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ADB. Iz istog razloga vrijedi da simetrala stranice $\overline{AB}$ i kuta $\angle ACB$ se sijeku u polovištu luka $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ACB. Budući da je $ABCD$ tetivni četverokut, kružnice trokuta ACB i ADB se poklapaju. Stoga se navedena 3 pravca sijeku u jednoj točki (polovištu luka $\widehat{AB}$). ✓

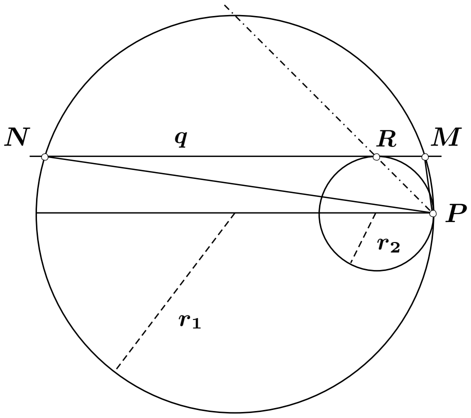
Sljedeći je primjer sa županijskog natjecanja za 1. razred 2001. godine.

Primjer 2. Kružnice k_1 i k_2 s polumjerima r_1 i r_2 ($r_1 < r_2$) dodiruju se iznutra u točki P. Neka je q jedna tangenta na k_1, koja ju dodiruje u točki R, i paralelna je zajedničkom promjeru danih kružnica. Neka su M i N sjecišta tangente q s k_2. Dokažite da je PR simetrala kuta $\angle MPN$.

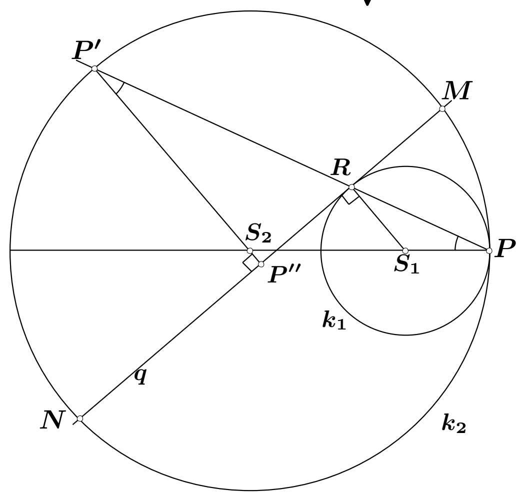
Ilustracija ovog primjera dana je na slici 4., a mi ćemo dokazati malo općenitiju tvrdnju.

Primjer 3. Kružnice k_1 i k_2 s polumjerima r_1 i r_2 ($r_1 < r_2$) dodiruju se iznutra u točki P. Neka je q jedna tangenta na k_1, koja ju dodiruje u točki R. Neka su M i N sjecišta tangente q s k_2. Dokažite da je PR simetrala kuta $\angle MPN$.

Dakle, paralelnost tangente ***suvišna*** je u tvrdnji prethodnog primjera. Dokažimo ovo općenitiju tvrdnju.



Slika 4.



Slika 5.

Rješenje. Neka je P' druga točka u kojoj pravac PR siječe kružnicu k_2. Točka P'' je nožište okomice na pravac MN. Cilj nam je pokazati da je P'' polovište dužine $\overline{MN}$, a tada je $P'P''$ simetrala stranice $\overline{MN}$ i tvrdnja slijedi po teoremu 1. Neka je S_1 središte kružnice k_1 i $\alpha := \angle S_1PR$. Budući da je trokut RS_1P jednakokračan (vrijedi $|RS_1| = r_1 = |S_1P|$), vrijedi $\angle PRS_1 = \angle S_1PR = \alpha$. Budući da kutovi $\angle NRS_1 = 90^\circ$ (jer je MN tangenta na k_1 u R), $\angle S_1RP$ i $\angle PRM$ čine ispruženi kut, vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle PRM &= 180^\circ - \angle NRS_1 - \angle S_1RP \\ &= 90^\circ - \alpha\end{aligned}$$

Kutovi $\angle PRM$ i $\angle P'RP''$ su vršni pa vrijedi

$$\angle P'RP'' = \angle PRM = 90 - \alpha.$$

Budući da je trokut $P'P''R$ pravokutan, slijedi: $\angle P''P'R = 90^\circ - \angle P'RP'' = \alpha$, dakle $\angle P''P'R = \angle S_1PR$. Neka je S_2 središte kružnice k_2. Pravac PS_1 (okomica na zajedničku tangentu kružnica k_1 i k_2) prolazi kroz S_2. Zbog jednakokračnosti trokuta $P'S_2P$ slijedi:

$$\angle PP'S_2 = \angle S_2PP' = \angle S_1PR = \alpha.$$

Dakle S_2 se nalazi na pravcu $P'P''$. Budući da je S_2P'' visina u jednakokračnom trokutu MS_2N, slijedi da je pravac $S_2P'' = P'P''$ simetrala stranice $\overline{MN}$ čime je tvrdnja dokazana po teoremu 1. ✓

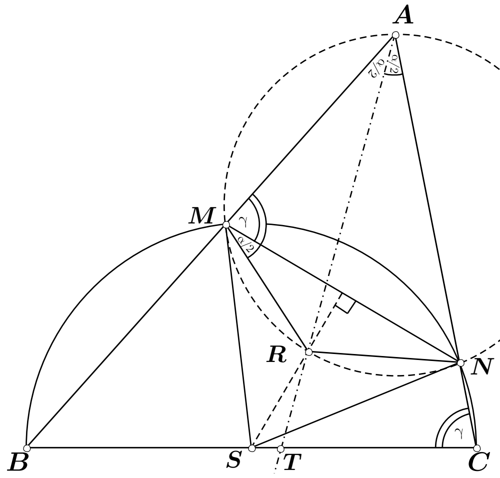
Sljedeći primjer se pojavio na MMO 2004. godine.

Primjer 4. Neka je ABC šiljastokutan trokut, takav da je $|AB| \neq |AC|$. Kružnica kojoj je promjer $\overline{BC}$ siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama M i N. Polovište stranice je točka S. Sjecište simetrala kutova $\angle BAC$ i $\angle MSN$ je točka R. Dokažite da se kružnice opisane trokutima BMR i CNR sijeku u točki na stranici $\overline{BC}$.

Rješenje. Promatrajmo trokut MSN. On je jednakokračan, pa je simetrala kuta $\angle MSN$ istovremeno i simetrala stranice $\overline{MN}$. To također znači da je točka R sjecište simetrale kuta $\angle NAM$ i simetrale stranice $\overline{MN}$. Po teoremu 1. točka R leži na opisanoj kružnici trokuta MAN, odnosno četverokut $AMRN$ je **tetivni**.

Označimo kutove trokuta ABC uobičajeno s α, β, γ. AR je simetrala kuta $\angle BAC$, pa vrijedi da je $\angle MAR = \angle RAN = \alpha/2$. Zbog tetivnosti četverokuta $AMRN$ slijedi da je $\angle RMN = \angle RAN = \alpha/2$. Uočimo kako je i četverokut $BCNM$ također tetivni. Stoga je:

$$\angle BMN = 180^\circ - \angle NCB = 180^\circ - \gamma,$$



Slika 6.

pa je njemu suplementarni kut $\angle NMA = 180° - \angle BMN = \gamma$. Promotrimo li trokut MRA, uočavamo da je

$$\angle ARM = 180° - \angle RMA - \angle MAR = 180° - \alpha - \gamma = \beta.$$

Neka simetrala AR siječe $\overline{BC}$ u točki T. Tada je

$$\angle MRT = 180° - \angle ARM = 180° - \gamma,$$

dakle četverokut $TRMB$ je tetivan. Kružnica opisana trokutu BMR siječe $\overline{BC}$ u točki T. Analogno tome pokažemo da kružnica opisana trokutu CNR siječe $\overline{BC}$ u točki T. Time je tvrdnja dokazana. ✓

DOLJE TROKUT! – À BAS LE TRIANGLE!

Sredinom 20. stoljeća skupina mladih matematičara pod zajedničkim pseudonimom **Nicolas Bourbaki** odlučila se na pothvat ponovnog zasnivanja matematike polazeći od ovog slogana. Na to su bili potaknuti beskrajnim ,,*prežvakavanjem*" trokuta i raznih konstruktivnih zadataka te su počeli sustavno izgrađivati moderni pristup matematici na osnovama teorije skupova.

U svojoj knjizi *Linearna algebra i elementarna geometrija* jedan od osnivača grupe Bourbaki **Jean Dieudonné**, član Francuske akademije znanosti, piše:

(...) Pogledajmo molim vas, nepristrano sljedeće teme, koje još uvijek zauzimaju značajno mjesto u nastavi matematike:

I. Konstrukcije ,,ravnalom i šestarom"

II. Svojstva tradicionalnih ,,figura" kao što su: trokuti, četverokuti, kružnice i familije kružnica, čunjosječnjice, sa svim profinjenjima prikupljenim od generacija ,,geometara" i profesora koji su tragali za ispitnim zadacima.

III. Mnoštvo ,,trigonometrijskih formula" i njihovih kaledioskopskih transformacija, pomoću kojih se dobivaju krasna ,,rješenja" ,,problema" o trokutima i to pomoću ,,računa s logaritmima", izvolite!

Otvorimo li međutim nasumce bilo koju knjigu koja tretira gradivo što se proučava na sveučilištu, odmah ćemo zapaziti da se ***nikada*** *ne spominju te lijepe stvari! ... druge ,,figure", tako drage nekadašnjim geometrima, jednostavno su nestale kao da su u zemlju propale.*

Moglo bi se prigovoriti da je sveučilišna nastava suviše apstrakna i da će ono što se nauči u srednjoj školi biti mnogo ,,korisnije" npr. za buduće inženjere. Istina je, kao što se može vidjeti lijepim fotografijama, na gredama nekih metalnih konstrukcija pojavljuju se kaskade trokuta. No postavlja se pitanje da li je kod stvaranja nečeg sličnog korisnije znati da se visine trokuta sijeku u jednoj točki, ili vladati nekim osnovnim principima o čvrstoći materijala?...

Zato bih želio snažno podvući kako smatram da nastava u srednjoj školi ***nema*** *zadatak da formira buduće matematičare, čak ni buduće profesore matematike; upravo je tradicionalna nastava matematike ona koja zaboravlja tu osnovnu istinu, jer kome su drugom, nego budućem specijaliziranom matematičaru namijenjene te lijepe igračke kao kružnica devet točaka ili teorem Dandelina, kojima se tako često poklanja pažnja.*